A. Kapanowski

Fizyka - ćwiczenia nr 1

26 lutego 2024

Pochodna funkcji

Definicja 1 (F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1978).

Niech f będzie funkcją odwzorowującą przedział (a, b) w zbiór $\subset \mathbb{R}$, x_0 i x będą dwoma różnymi punktami przedziału, a $h = x - x_0$. Wyrażenie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f między punktami x i x_0.

Przykład 1.

Weźmy funkcję liniową $f(x) = a_1 x + a_0$. Iloraz różnicowy przyjmie postać:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{[a_1(x_0 + h) + a_0] - (a_1 x_0 + a_0)}{h} = \frac{a_1 h}{h} = a_1. \tag{2}$$

Dla funkcji stałej ($a_1 = 0$) iloraz różnicowy wynosi zero.

Przykład 2.

Weźmy funkcję kwadratową $f(x) = a_2 x^2$. Obliczamy iloraz różnicowy

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a_2(x_0 + h)^2 - a_2 x_0^2}{h} = \frac{2a_2 x_0 h + a_2 h^2}{h} = 2a_2 x_0 + a_2 h. \tag{3}$$

W granicy $h \to 0$ otrzymujemy $2a_2 x_0$.

Definicja 2.

Jeżeli iloraz różnicowy ma granicę dla $h \to 0$, to granicę oznaczamy $f'(x_0)$ i nazywamy *pochodną funkcji* f w punkcie x_0.

Przykład 3.

Właściwości pochodnych.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{e}^x = \exp(x)$	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(u + v)' = u' + v',$$

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Zadanie 1.

Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2x$,
b) $f(x) = x \sin x$,
c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$,
d) $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
e) $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Definicja 3.

Pochodna funkcji złożonej. Niech $f_1 : X \to Y$ i $f_2 : Y \to Z$ będą funkcjami na zbiorach $X, Y, Z \supset \mathbb{R}$ i f będzie ich złożeniem $f = f_2 \circ f_1$, tak że $f(x) = f_2[f_1(x)]$. Pochodna funkcji f dana jest wzorem

$$f'(x) = f_2'(y) f_1'(x), \tag{4}$$

gdzie $y = f_1(x)$.

Zadanie 2.

Obliczyć pochodne funkcji złożonej:

a) $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^5$,

b) $f(x) = \sin(3x + 5)$,

c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$,

d) $f(x) = \ln(\sin x)$.

Całki

Funkcja pierwotna

Definicja 4 (F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1978).

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f jeśli:

$$F'(x) = f(x). \tag{5}$$

Inaczej mówimy o *całce nieoznaczonej* $F(x) = \int f(x)dx$. Obliczanie funkcji pierwotnej do f nazywamy *całkowaniem* funkcji f.

Przykład 4 (właściwości całek).

Funkcja pierwotna wyznaczona jest z dokładnością do stałej:

$$[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = f(x). \tag{6}$$

Stałą C nazywamy *stałą całkowania*.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$e^x = \exp(x)$	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

Zadanie 3.

Oblicz:

a) $\int 3 \cos x dx$,

b) $\int \left(x^3 - 5x + 2\right) dx$.

Związek całki z polem

Weźmy f - funkcję ciągłą i dodatnią w $[a, b]$ i $P = P(x)$ pole ograniczone krzywą, osią odciętych i rzędnymi w a i x (Rys. 1). Podzielmy powierzchnię P na wiele cienkich pasków o szerokości h. Zakładając, że zarówno x, jak i $x + h \in [a, b]$, różnica $P(x + h) - P(x)$ równa jest powierzchni paska i spełnia nierówności

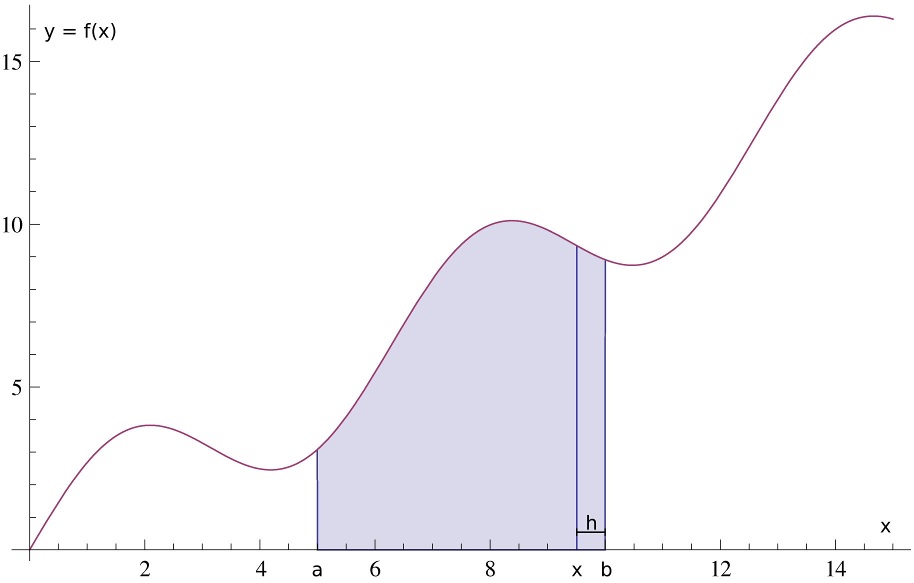
$$f(x_{min})h \leqslant P(x + h) - P(x) \leqslant f(x_{max})h, \tag{7}$$

gdzie $f(x_{min})$ to najmniejsza, a $f(x_{max})$ największa wartość funkcji f w przedziale $[x, x + h]$. Dzieląc obustronnie przez h otrzymujemy

$$f(x_{min}) \leqslant \frac{P(x + h) - P(x)}{h} \leqslant f(x_{max}). \tag{8}$$

Dla $h \to 0$ mamy $f(x_{min}) \to f(x)$ i $f(x_{max}) \to f(x)$, a iloraz różnicowy przechodzi w pochodną, dostajemy więc równanie:

$$P'(x) = f(x). \tag{9}$$



Rysunek 1. Pole ograniczone krzywą.

Tak zdefiniowane pole jest więc funkcją pierwotną funkcji f. Jak już wiemy, pierwotną zawsze otrzymujemy z dokładnością do stałej, tak więc

$$P(x) = F(x) + C. \tag{10}$$

Stałą całkowania otrzymujemy z warunku $P(a) = 0$ (skoro przez P oznaczyliśmy pole pomiedzy a a x). Stąd $C = -F(a)$. Ostatecznie

$$P(x) = F(x) - F(a). \tag{11}$$

Pole zaciemnione jak na Rys. 1 przyjmuje więc wartość $F(b) - F(a)$. Alternatywnie zapisujemy to w postaci

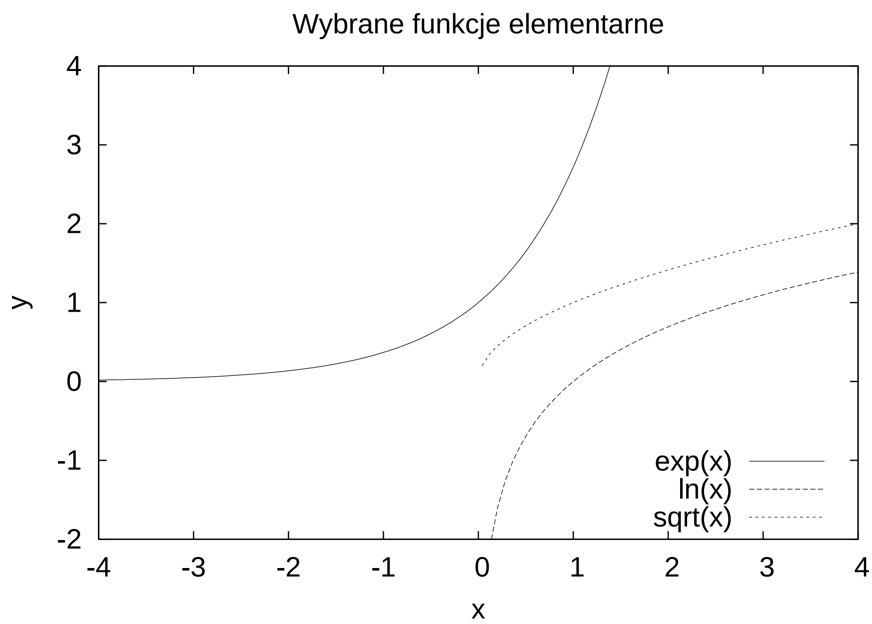
$$P = \int_a^b f(x)dx. \tag{12}$$

Zadanie 4.
Oblicz:

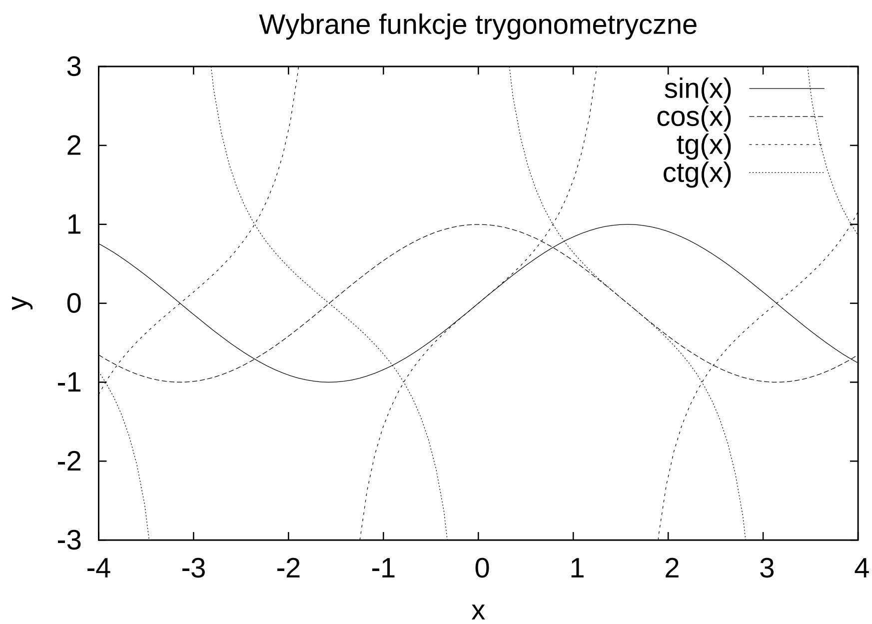
a) $\int_0^\pi \sin x dx$,

b) $\int_0^1 x^2 dx$.

Rysunki



Rysunek 2. Wybrane funkcje elementarne.



Rysunek 3. Wybrane funkcje trygonometryczne.