Kinematyka

2/15

Andrzej Kapanowski
https://ufkapano.github.io/

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2024

Podstawowe pojęcia

- Kinematyka jest częścią mechaniki, która zajmuje się opisem ruchu ciał bez wnikania w jego przyczyny.
- Ruchem nazywamy wzajemne przemieszczanie się w przestrzeni, w miarę upływu czasu, jednych ciał względem innych.
- Ruch jest zjawiskiem względnym, tzn. ciało A poruszające się względem ciała B może w tym samym czasie spoczywać względem ciała C.
- Przykład: pasażer jadący pociągiem.
- Poprawny opis ruchu wymaga podania układu odniesienia, względem którego ruch jest opisywany. Układ odniesienia to układ współrzędnych związany z ustalonym ciałem lub zbiorem ciał.

Modele wykorzystywane do opisu ruchu

- Punkt materialny jest to ciało, którego rozmiary można pominąć w opisie jego ruchu.
- Przykład: ruch Ziemi wokół Słońca.
- Bryła sztywna jest to zbiór dużej liczby punktów materialnych, znajdujących się w określonych, nie zmieniających się odległościach wzajemnych.
- To samo ciało można raz uważać za punkt materialny, a drugi raz za bryłę sztywną.

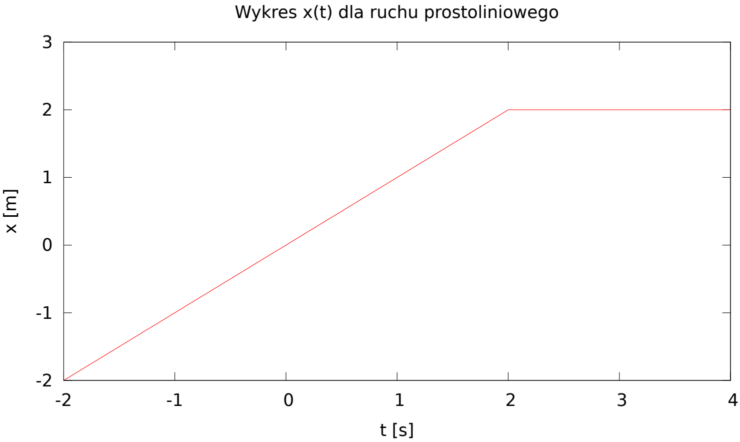
Dalsze pojęcia

- Tor ruchu to krzywa utworzona przez punkty określające kolejne położenia ciała w przestrzeni.
- Droga s jest to długość toru (skalar).
- Położenie ciała względem danego układu odniesienia możemy określić za pomocą wektora położenia $\vec{r}$.
  Wektor położenia łączy początek układu współrzędnych z aktualnym położeniem ciała w przestrzeni.
- Wektor przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ łączy początkowe i końcowe położenie ciała, określone dla danego czasu obserwacji.

Ruch prostoliniowy

- Torem ruchu prostoliniowego jest linia prosta. Dzięki temu możemy stosować opis skalarny zamiast wektorowego.
- Położenie ciała wyznaczamy na nieograniczonej osi x najczęściej względem początku osi (punkt zerowy). Oś ma kierunek dodatni i kierunek ujemny, oraz jednostkę miary.
- Zmiana położenia od x_1 (chwila t_1) do x_2 (chwila t_2) wynosi $\Delta x = x_2 - x_1$. Przemieszczenie Δx może być dodatnie, ujemne lub zerowe.
- Wygodnym sposobem przedstawienia ruchu jest wykreślenie jego położenia x jako funkcji czasu t - wykres $x(t)$.

Wykres ruchu



Prędkość

Prędkość średnia (w czasie od t_1 do t_2)

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{1}$$

Prędkość chwilowa (w chwili t)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Jednostką prędkości jest m/s.

Przyspieszenie

Przyspieszenie średnie (w czasie od t_1 do t_2)

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \tag{3}$$

Przyspieszenie chwilowe (w chwili t)

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}. \tag{4}$$

Jednostką przyspieszenia jest m/s^2.

Ruch ze stałym przyspieszeniem I

- Stałe przyspieszenie chwilowe $a = \text{const}$.
- Prędkość chwilowa $v = v_0 + at$, gdzie $v_0 = v(0)$.
- W tym ruchu zachodzi związek

$$a_{sr} = \frac{(v_0 + at_2) - (v_0 + at_1)}{t_2 - t_1} = a. \tag{5}$$

- Położenie $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$, gdzie $x_0 = x(0)$.
- Prędkość średnia

$$v_{sr} = \frac{v_0(t_2 - t_1) + a(t_2^2 - t_1^2)/2}{t_2 - t_1} = \frac{2v_0 + a(t_2 + t_1)}{2}, \tag{6}$$

$$v_{sr} = \frac{(v_0 + at_2) + (v_0 + at_1)}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{7}$$

Ruch ze stałym przyspieszeniem II

- Podstawowe równania ruchu ze stałym przyspieszeniem:

$$v = v_0 + at, \tag{8}$$

$$x = x_0 + v_0 t + at^2/2. \tag{9}$$

- Występuje 6 wielkości: x, v, a, t, x_0, v_0. Zwykle w równaniach występuje na raz 5 wielkości, czyli jedną można wyeliminować, np. czas,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{10}$$

Spadek swobodny i rzut pionowy

- Spadek swobodny jest to ruch wzdłuż prostej pionowej bez prędkości początkowej ($v_0 = 0$), z przyspieszeniem grawitacyjnym $g = 9.8 m/s^2$.
- Ustalamy, że oś x jest pozioma, a oś y skierowana pionowo w górę. Spadek swobodny będzie się odbywał wzdłuż osi y ze stałym przyspieszeniem $a = -g$.
- Rzut pionowy jest ruchem ciała wzdłuż prostej pionowej, którego prędkość początkowa jest zwrócona do góry ($v_0 > 0$), a przyspieszenie wynosi $a = -g$.

Ruch prostoliniowy złożony

- Rozważmy dwa układy współrzędnych, układ spoczywający S i układ S' poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością u względem układu S.
- Współrzędne ciała P w układach S i S' to odpowiednio x i x'.
- Zakładamy, że czas płynie w obu układach jednakowo, czyli $t = t'$. To założenie jest słuszne, gdy prędkości układu poruszającego się jest mała w porównaniu z prędkością światła w próżni, tzn. $u \ll c$.
- Związek między wielkościami:

$$x = x' + ut' \text{ (transformacja Galileusza)}, \tag{11}$$

$$v = v' + u \text{ (prawo dodawania prędkości)}, \tag{12}$$

$$a = a' \text{ (jednakowe przyspieszenia)}. \tag{13}$$

Wielkości fizyczne

Podział wielkości fizycznych ze względu na własności transformacyjne.

- Skalary, tensory zerowego rzędu - temperatura, ciśnienie, masa, energia, itp.
- Wektory, tensory pierwszego rzędu - przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siła, itp.
- Tensory drugiego rzędu - moment bezwładności, przenikalność dielektryczna, itp.
- Tensory wyższych rzędów.

Własności wektorów

Przedstawienie graficzne wektora: strzałka.
Oznaczenia wektora: $\vec{a}$, $\mathbf{a}$.

- Kierunek (prosta zawierająca wektor).
- Zwrot (dwie możliwości dla ustalonego kierunku).
- Wartość (długość, moduł), $|\vec{a}| = a \geq 0$.
  Uwaga: a czasem oznacza współrzędną wektora!
- Punkt przyłożenia (nie zawsze istotny).
- Działania na wektorach.

Przykład: obrót w przestrzeni nie jest wektorem.

Działania na wektorach

- Mnożenie wektora przez liczbę, $\alpha\vec{a}$.
- Dodawanie (składanie) wektorów - sposób geometryczny, a nie algebraiczny (reguła równoległoboku).

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (przemienność)}. \tag{14}$$

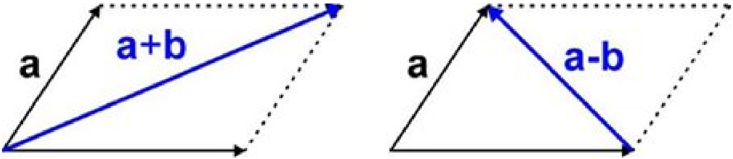
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \text{ (łączność)}. \tag{15}$$

- Odejmowanie wektorów.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}. \tag{16}$$

- Rozkład wektora na (wektory) składowe.
- Iloczyn skalarny wektorów.
- Iloczyn wektorowy wektorów.

Dodawanie wektorów



Rozkład wektora na składowe

- Dany wektor można zawsze traktować jako wektor wypadkowy wektorów składowych. Istnieje wiele możliwości rozkładu wektora na składowe. W praktyce często robimy rozkład wektora na składowe równoległe do osi ustalonego układu współrzędnych.
- Przykład: rozkład wektora w układzie prostokątnym na płaszczyźnie.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y, \tag{17}$$

$$a_x = a\cos\theta, \; a_y = a\sin\theta, \tag{18}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \text{ (twierdzenie Pitagorasa).} \tag{19}$$

Analogicznie postępujemy w trzech wymiarach.

Wektory jednostkowe (wersory)

- Wektorem jednostkowym nazywamy wektor o długości 1, skierowany w określonym kierunku.
- Przykład: układ prawoskrętny w trzech wymiarach, wersory $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$,
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}. \tag{20}$$
- Przykład: dodawanie wektorów na płaszczyźnie,
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}. \tag{21}$$

Analogicznie postępujemy w trzech wymiarach.

Iloczyn skalarny I

- Iloczyn skalarny wektorów daje skalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\phi, \tag{22}$$

  gdzie ϕ jest kątem pomiędzy wektorami.

- Iloczyn skalarny jest przemienny,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \tag{23}$$

- Jednakowe wektory, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$.
- Wektory prostopadłe, $\phi = \pi/2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Iloczyn skalarny II

- Dla wersorów w prostokątnym układzie współrzędnych zachodzi

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \tag{24}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0. \tag{25}$$

- Jeżeli wyrazimy dwa wektory przez wersory, to wykonując iloczyn skalarny korzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania. Można wykazać, że

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{26}$$

Iloczyn wektorowy I

- Iloczyn wektorowy wektorów daje wektor (pseudowektor)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \tag{27}$$

$$c = ab \sin\phi \ (\text{długość}), \tag{28}$$

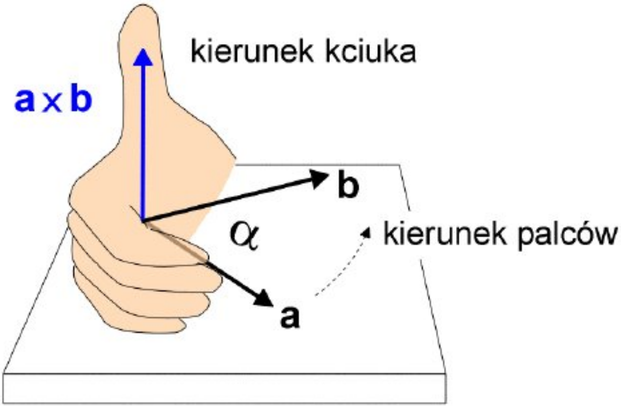
  $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, zwrot wyznaczamy na podstawie reguły śruby prawoskrętnej (reguła korkociągu).

- Iloczyn wektorowy nie jest przemienny,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \tag{29}$$

- Jednakowe wektory, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.
- Wektory równoległe, $\phi = 0$, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Reguła korkociągu



Iloczyn wektorowy II

- Dla wersorów w prostokątnym układzie współrzędnych zachodzi

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0, \tag{30}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}. \tag{31}$$

- Jeżeli wyrazimy dwa wektory przez wersory, to wykonując iloczyn wektorowy korzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania. Można wykazać, że

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}. \tag{32}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Ruch w dwóch wymiarach I

Przemieszczenie (w czasie od t_1 do t_2)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}. \tag{34}$$

Prędkość średnia (w czasie od t_1 do t_2)

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}. \tag{35}$$

Prędkość chwilowa (w chwili t)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}. \tag{36}$$

Ruch w dwóch wymiarach II

- Wektor prędkości chwilowej ciała jest styczny do toru, po którym to ciało się porusza.
- *Uwaga*: wektor prędkości rysujemy często na tym samym rysunku, co wektor położenia; można porównywać kierunki tych wektorów, ale nie długości, ponieważ te wielkości fizyczne mają inne jednostki.
- Dla ruchu na płaszczyźnie opisanego przez $x(t)$, $y(t)$ możemy wyeliminować czas i otrzymać równanie toru ruchu ciała $y = f(x)$.

Ruch w dwóch wymiarach III

Przyspieszenie średnie (w czasie od t_1 do t_2)

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}. \tag{37}$$

Przyspieszenie chwilowe (w chwili t)

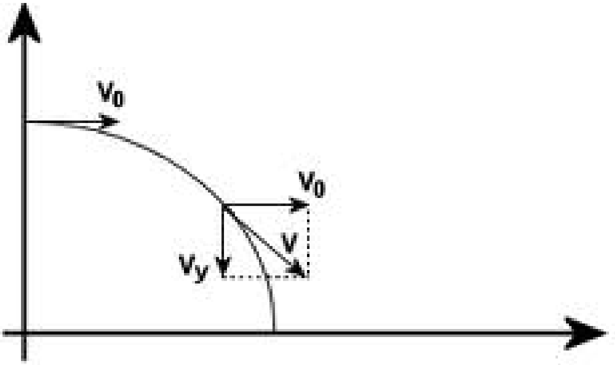
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}. \tag{38}$$

W ruchu krzywoliniowym przyspieszenie ciała nie jest styczne do toru. Wektor przyspieszenia ciała możemy rozłożyć na dwie składowe: przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne.

Ruch w dwóch wymiarach IV

- Najbardziej typowe ruchy krzywoliniowe płaskie to: rzut poziomy, rzut ukośny i ruch po okręgu.
- W rzucie poziomym prędkość początkowa jest skierowana poziomo, a przyspieszenie jest przyspieszeniem grawitacyjnym skierowanym pionowo w dół.
- W rzucie ukośnym prędkość początkowa jest skierowana pod pewnym kątem ostrym do poziomu, a przyspieszenie jest przyspieszeniem grawitacyjnym skierowanym pionowo w dół.
- W ruchu po okręgu torem ruchu jest okrąg.

Rzut poziomy



Rzut poziomy

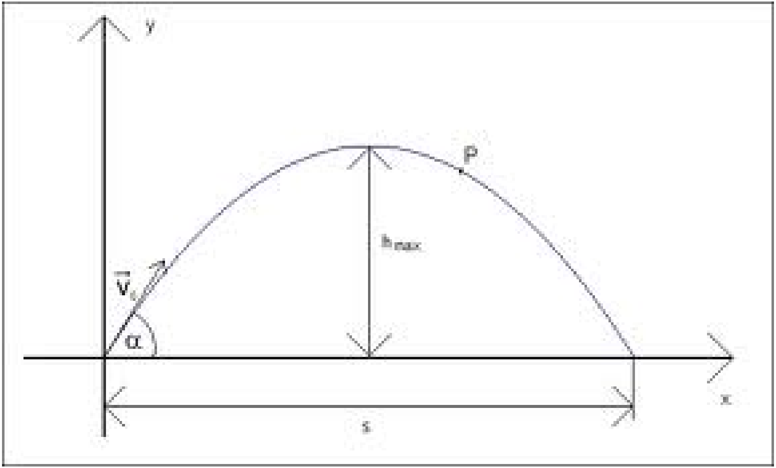
Równanie ruchu

$$x = v_0 t, \ \ y = y_0 - gt^2/2. \tag{39}$$

Równanie toru

$$y = y_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \tag{40}$$

Rzut ukośny



Rzut ukośny

Równanie ruchu

$$x = v_0 t \cos\alpha, \;\; y = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2. \tag{41}$$

Równanie toru

$$y = x \,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{42}$$

Zasięg rzutu ukośnego

$$y = 0, \;\; x_m = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}. \tag{43}$$

Największy zasięg dla $\alpha = \pi/4$.

Ruch po okręgu I

- W ruchu po okręgu wektor prędkości ciała stale zmienia swój kierunek, czyli mamy ruch zmienny, w którym istnieje niezerowe przyspieszenie.
- Jeżeli w ruchu po okręgu wektor prędkości zachowuje stałą długość (nie kierunek!), to mówimy o ruchu *jednostajnym* po okręgu.
- Ruch jednostajny po okręgu jest ruchem okresowym, tzn. ruchem, który powtarza się w regularnych odstępach czasu.
- Czas trwania jednego pełnego obiegu po okregu nazywamy okresem

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \tag{44}$$

gdzie R jest promieniem okręgu, v wartością prędkości.

Ruch po okręgu II

- Rozważmy równania ruchu:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}, \ |\vec{r}| = R, \tag{45}$$

$$x = R\cos(\omega t), \ y = R\sin(\omega t), \tag{46}$$

gdzie $\omega = 2\pi/T$ to częstość.
- Torem ruchu jest okrąg, $x^2 + y^2 = R^2$.
- Prędkość jest styczna do wektora położenia,

$$v_x = -\omega R\sin(\omega t) = -\omega y, \tag{47}$$

$$v_y = \omega R\cos(\omega t) = \omega x, \tag{48}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = xv_x + yv_y = -x\omega y + y\omega x = 0, \tag{49}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega R. \tag{50}$$

Ruch po okręgu III

- Przyspieszenie

$$a_x = -\omega^2 R\cos(\omega t) = -\omega^2 x, \tag{51}$$

$$a_y = -\omega^2 R\sin(\omega t) = -\omega^2 y, \tag{52}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 x\hat{i} - \omega^2 y\hat{j} = -\omega^2 (x\hat{i} + y\hat{j}) = -\omega^2 \vec{r}. \tag{53}$$

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \text{ (przyspieszenie dośrodkowe)}. \tag{54}$$

- Częstotliwość $f = 1/T$, $[f] = 1/s = 1\text{Hz}$ (herc).

Podsumowanie

- Wielkości fizyczne w kinematyce.
- Własności wektorów.
- Ruchy płaskie.
- Ruch po okręgu.