5.06.2024

# Matematyka dyskretna, zestaw 10.

10.1. Weźmy permutację

$$\sigma = (2, 3, 4, 5) \circ (1) \in S_5.$$

Oblicz $\sigma^2$, $\sigma^3$, $\sigma^4$, $\sigma^5$ i $\sigma^{-1}$. Ile wynosi rząd $\sigma$ jako elementu grupy $S_5$?

10.2. Rozłóż na rozłączne cykle permutację

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 8 & 2 & 9 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz wyznacz $\pi^{71}$.

10.3. Weźmy permutację

$$\rho = (2\,4\,3\,1) \in S_4.$$

Podaj reprezentację macierzową permutacji. Użyj reprezentacji macierzowej do wyliczenia $\rho^{-1}$ i $\rho^2$.

10.4. Znak permutacji $\pi$ to wielkość obliczana ze wzoru $\mathrm{sgn}\pi = (-1)^k$, gdzie $k$ można wyznaczyć na dwa sposoby. Po pierwsze, każdą permutację da się rozłożyć na pewną liczbę transpozycji – transpozycja jest to cykl o długości 2. Po drugie, każda permutacja określa pewną liczbę inwersji – inwersja występuje wtedy, gdy $i < j$, ale $\pi(i) > \pi(j)$. Dowolną z powyższych liczb podstawiamy za $k$.

Wyznacz liczbę transpozycji i oblicz liczbę inwersji dla przykładowej permutacji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 8 & 3 & 7 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Czy otrzymane $k$ jest takie samo w obu przypadkach? Jaki jest znak $\pi$?

10.5. Jeżeli litery d,y,s,k,r,e,t,n,a ułożymy w losowym porządku, to z jakim prawdopodobieństwem utworzą one słowo "dyskretna"? A co w przypadku liter m,m,a,a,a,t,t,e,y,k i słowa "matematyka"?

10.6. Ile różnych parzystych liczb sześciocyfrowych da się ułożyć z cyfr 0,1,3,4,5,7 (bez powtórzeń)? A ile co najwyżej trzyliterowych ciągów znaków można utworzyć przy użyciu liter A,B,C,D,E,F,G (bez powtórzeń)? Oblicz przy użyciu permutacji.

10.7. Nie korzystając z relacji rekurencyjnej, a tylko ze wzorów na liczbę permutacji danego typu, oblicz wartość liczb Stirlinga $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

10.8. Nie korzystając z relacji rekurencyjnej, a tylko zliczając odpowiednie podzbiory przy użyciu współczynników dwumianowych, oblicz wartość liczb Stirlinga $\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ i $\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.

10.9. Uzasadnij w języku kombinatoryki, dlaczego dla dowolnego $n > 0$ zachodzą równości

$$\left[ n \atop n-1 \right] = \binom{n}{2}, \tag{1}$$

$$\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1\,. \tag{2}$$

10.10. Udowodnij – zliczając odpowiednie podzbiory – że dla $n \geqslant 3$ zachodzi równość

$$\left\{ n \atop n-2 \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}\,.$$

10.11. Udowodnij tożsamość

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}\,.$$

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Alicja Kawala
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski