15.05.2024

Matematyka dyskretna, zestaw 7.

7.1. W ramach rachunku różnicowego, definiując potęgę ubywającą

$$x^{\underline{m}} := x(x-1)\dots(x-m+1) \tag{1}$$

i korzystając z własności sumowania oznaczonego

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \sum_0^n x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \tag{2}$$

oblicz $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ oraz $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$.

7.2. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenia

$$\Delta^2\left(2^k\sum_{j=1}^{k}(j-1)^{\underline{-1}}\right) - 2\Delta\left(2^k k^{\underline{-1}}\right)\,, \tag{3}$$

$$\sum_4^j \left(j4^x + x^{\underline{j-4}}\right)\delta x + \sum_0^j 4\,\delta x \tag{4}$$

(w pierwszym przypadku wygodnie skorzystać ze wzoru na różnicę iloczynu funkcji).

7.3. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n-1} kH_k\,, \tag{5}$$

korzystając z sumowania przez części. Wynik powinien się wyrażać przez dolne silnie (nazywane też potęgami ubywającymi), stałe i liczby harmoniczne.

7.4. Oblicz sumę oznaczoną

$$\sum_0^n 3^x x(x-1)\,\delta x\,, \tag{6}$$

dwukrotnie korzystając z sumowania przez części. Wynik powinien się wyrażać przez dolne silnie (nazywane też potęgami ubywającymi), stałe i funkcje wykładnicze.

7.5. Przy pomocy algorytmu Euklidesa, znajdź rozwinięcie w ułamek łańcuchowy dla liczb wymiernych $\frac{196}{269}$ i $\frac{1015}{213}$.

7.6. Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, wyznacz następujący rozkład największego wspólnego dzielnika:

$$\mathrm{NWD}(a,b) = ax + by\,, \quad x, y \in \mathbb{Z}\,, \tag{7}$$

dla par liczb $(146, 248)$ i $(344, 484)$.

7.7.* Pokaż, że dla liczb Fibonacciego zachodzi tożsamość (w tym celu należy skorzystać z własności $F_{a+b} = F_{a+1}F_b + F_aF_{b-1}$ oraz $\mathrm{NWD}(F_n, F_{n+1}) = 1$)

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = \mathrm{NWD}(F_m, F_{n-m})\,, \quad n > m\,, \tag{8}$$

a następnie, odwołując się do algorytmu Euklidesa, udowodnij

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{NWD}(n,m)}\,. \tag{9}$$

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Alicja Kawala
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski