24.04.2024

Matematyka dyskretna, zestaw 6.

6.1. Ciąg τ_n opisuje średnią liczbę porównań potrzebnych do posortowania n losowych elementów przy użyciu „sortowania szybkiego” (quicksort):

$$\begin{cases} \tau_0 = 0\,, \\ \tau_n = 1 + n + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tau_k\,, \quad n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Przekształć relację rekurencyjną do prostszej postaci, a następnie zastosuj metodę czynnika sumacyjnego, aby znaleźć jawny wzór na τ_n.

6.2. Wiedząc że funkcja tworząca ciągu $a_n = 1$ ma postać

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

znajdź funkcje tworzące następujących ciągów:

- $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla n nieparzystych} \\ 1 & \text{dla n parzystych} \end{cases}$,
- $b_n = n$,
- $c_n = n^2 + n$.

6.3. Niech a_n oznacza liczbę sposobów zapłacenia za zakupy o wartości n zł, jeżeli dysponujemy nieograniczoną liczbą monet o nominałach 1, 2 i 5 zł. Wyznacz funkcję tworzącą ciągu a_n.

6.4. Liczby Catalana C_n pojawiają się w wielu zagadnieniach kombinatorycznych (dotyczących zliczania m.in. drzew binarnych, rozmieszczeń nawiasów, monotonicznych dróg, czy podziałów uporządkowanego zbioru). Spełniają one następujące równanie rekurencyjne:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\,, \quad C_0 = 1\,.$$

Wyprowadź ich funkcję tworzącą. Wskazówka: można w tym celu zmienić kolejność podwójnego sumowania. Nadobowiązkowo: korzystając z funkcji tworzącej, znajdź postać zwartą C_n.

6.5. Oblicz wartości sum

$$\frac{1}{136}\sum_{j=2}^{13}\sum_{k^2-6k+8=0} kH_k, \tag{1}$$

$$-2 + \sum_{0<j+1\leqslant k\leqslant 4} k^j. \tag{2}$$

6.6. Odwracając kolejność podwójnego sumowania i dokonując dalszych przekształceń, znajdź postać zwartą sumy

$$S = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{k} k\,.$$

Pojedynczą sumą jakich wyrazów jest ona?

6.7. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} k^3\,, \quad \text{zaburzając} \quad \sum_{k=0}^{n} k^4\,.$$

Wynik sumy n wyrazów k^2 można potraktować jako znany.

6.8. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} H_k\,, \quad \text{zaburzając} \quad \sum_{k=0}^{n} kH_k\,.$$

6.9. Przekształć wielomian

$$p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 2 \tag{3}$$

w kombinację potęg ubywających

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\Delta^k p(x)|_{x=0}}{k!}\, x^{\underline{k}}\,, \tag{4}$$

a następnie oblicz na tej podstawie kolejne różnice $\Delta^k p(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Alicja Kawala
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski