10.04.2024

Matematyka dyskretna, zestaw 4.

4.1. Korzystając z zasady indukcji zupełnej, udowodnij istnienie rozkładu na iloczyn (skończenie wielu) liczb pierwszych dla dowolnej liczby naturalnej większej od 1 i nie będącej liczbą pierwszą.

4.2. Korzystając z zasady indukcji zupełnej i dzielenia z resztą, udowodnij istnienie rozwinięcia dowolnej liczby wymiernej o mianowniku $n \in \mathbb{N}^*$ w ułamek łańcuchowy

$$\frac{b}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\ a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}} \quad , \tag{1}$$

gdzie $b, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$ i $k \in \mathbb{N}$. Czy rozwinięcie to jest jednoznaczne?

4.3. Wykaż przez indukcję wzór na postać zwartą sumy:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \,. \tag{2}$$

Wskazówka: w jednej z sum pojawiających się w dowodzie kroku indukcyjnego należy odpowiednio przedefiniować indeks k.

4.4. Korzystając z zasady minimum, udowodnij że

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 . \tag{4}$$

4.5. Wykaż przez indukcję, że

$$3n^2 + 3n + 1 < 3^n\,, \quad \forall n \geqslant 4\,, \tag{5}$$

$$5 | (13^n - 8^n)\,, \quad \forall n \geqslant 1\,. \tag{6}$$

4.6. Wykaż przez indukcję wzory na postać zwartą sum:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1\,, \tag{7}$$

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n\,, \tag{8}$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ (ciąg Fibonacciego).

4.7. Wyraź sumę

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{9}$$

poprzez liczby harmoniczne (można to zrobić na więcej niż jeden sposób).

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Alicja Kawala
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski